УДК 511

О ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Нгуен Тхи Ча

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: nguyentra.bsu@gmail.com

Аннотация. Доказано, что к заданному числу N можно подойти суммой двух квадратов простых чисел на расстояние, не большее, чем $\sqrt{N}\exp(-\ln^{0.1} N)$.

Ключевые слова: простые числа, диофантовы неравенства, явная формула, плотностная теорема.

1. Введение. Пусть $N(\sigma,T)$ — число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma\leqslant\Re s<1$, $0<\Im s\leqslant T$.

Оценки вида

$$N(\sigma,T)\ll T^{2\lambda(1-\sigma)}\ln^c T,\quad \lambda\geqslant 1,\quad c\geqslant 1\,,$$

где λ и c — константы, называются плотностными теоремами. Наилучшим современным значением λ в таких оценках является $\lambda=\frac{6}{5}$ (см. [1]). Константа c играет меньшую роль; в работе [2] доказано, что $c<18.2$.

Со времен Римана известны формулы, связывающие суммы по простым числам с суммами по нетривиальным нулям дзета-функции. Такие формулы называются явными. Пусть $\psi(x)$ – функция Чебышева. Одной из самых известных явных формул является следующее равенство:

$$\psi(x)=x-\sum_{|\Im\rho|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho}+O\Big(\frac{x\ln^2 x}{T}\Big)\,,$$

где $2<T\leqslant x$, а суммирование ведется по нетривиальным нулям дзета-функции ρ.

В сороковых годах двадцатого века Ю.В. Линник [3],[4] разработал новую технику решения арифметических задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Эта техника получила название плотностной. Плотностная техника особенно эффективна для решения задач о попадании простых чисел в короткие промежутки.

В монографии С.М. Воронина и А.А. Карацубы [5] содержится следующая теорема, доказанная на основе плотностной техники.

Теорема 1. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Для любого числа $H>0$ и числа N, удовлетворяющего условию $H>N^{1-\frac{1}{2\lambda}}\exp(\ln^{0.8}N)$, неравенство*

$$|p-N|\leqslant H \tag{1}$$

разрешимо в простых числах p.

Для числа решений $J(N,H)$ неравенства (1) справедлива оценка $J(N,H) \gg \frac{H}{\ln N}$.

В 2006 году в работе [6] В.В. Гирько и С.А. Гриценко при помощи плотностной техники доказана теорема.

Теорема 2. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Для любого числа $H > 0$ и числа N, удовлетворяющего условию $H > N^{1-\frac{1}{2\lambda}} \exp(\ln^{0.8} N)$, неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leqslant H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

В настоящей статье уточняется утверждение Теоремы 2, а также формулируются две новые теоремы о диофантовых неравенствах с простыми числами. Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 3. *Если $H > \sqrt{N} \exp(-\ln^{0.1} N)$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leqslant H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Теорема 4. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Если*

$$H > N^{(1-\frac{1}{2\lambda})^2} \exp(\ln^{0.8} N)\,,$$

то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leqslant H$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 и p_3.

Теорема 5. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Если*

$$H > N^{(1-\frac{1}{\lambda})(1-\frac{1}{2\lambda})} \exp(\ln^{0.8} N)\,,$$

то неравенство

$$|p_1 + p_2 - N| \leqslant H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

В настоящей статье представлено доказательство Теоремы 3, а доказательства теорем 4 и 5 автор рассчитывает опубликовать в последующих работах.

Замечание 1. В отличие от утверждений теорем 1 и 2 утверждение теоремы 3 не зависит от константы λ из плотностной теоремы.

В доказательстве теоремы 3 содержится оценка снизу для числа решений диофантова неравенства, однако эта оценка, по-видимому, не является точной.

Замечание 2. Интересно сравнить теоремы 1 и 3. В теореме 3 параметр H можно выбрать меньше, чем $\sqrt{N}$, а в теореме 1 разрешимость неравенства (1) при $H = \sqrt{N}$ не следует даже из гипотезы Римана.

Для доказательства Теоремы 3 нам потребуется несколько лемм.

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1.[Явная формула] *Пусть* $2 \le T \le x$. *Тогда*

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\gamma| \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ *— нули* $\zeta(s)$ *в критической полосе.*

Доказательство см. в [7, глава 5].

Лемма 2. *Для функции* $N(\sigma, T)$ *справедлива оценка*

$$N(\sigma, T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^c T$$

при $\lambda = \frac{6}{5}$.

Доказательство см. в [1].

Лемма 3. *Существует абсолютная постоянная* $c_1 > 0$ *такая, что* $\zeta(s) \ne 0$ *в области*

$$\sigma \ge 1 - \frac{c_1}{\ln^{2/3}|t|(\ln\ln|t|)^{1/3}}, \text{ где } |t| \ge 10\,.$$

Доказательство см. в [7, глава 6].

Лемма 4. *При* $T \ge 2$ *справедливы оценки*

$$\sum_{|\gamma - T| \le 1} 1 = O(\ln T), \quad \sum_{|\gamma - T| > 1} 1 = O(\ln^2 T)\,.$$

Доказательство см. в [7, глава 4].

Лемма 5. *Справедливо оценка*

$$\left|\sum_{|\gamma| \le T} x^\rho\right| \ll \max_{1/2 \le \sigma < 1} x^\rho N(\sigma, T)\,.$$

Доказательство см. в [5, глава 5].

3. Доказательство основной теоремы. Без ограничения общности считаем, что $H \le \sqrt{N}/2$.

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{N - 2N_1 < p^2 \le N - N_1} \sum_{\sqrt{N - H - p^2} \le k \le \sqrt{N + H - p^2}} \Lambda(k)\,,$$

где $N_1 = N^{19/24} \exp(\ln^{0.8} N)$.

Достаточно получить неравенство

$$S \gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}}\,. \tag{2}$$

Действительно, если на промежутках

$$[\sqrt{N-H-p^2}, \sqrt{N+H-p^2}]$$

нет простых чисел, то для S справедлива следующая оценка сверху:

$$S \ll \frac{N_1}{\sqrt{N}} \ln^2 N\,,$$

которая противоречит (2).

Воспользуемся леммой 1:

$$S = \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \Big(\sqrt{N+H-p^2} - \sqrt{N-H-p^2} -$$

$$- \sum_{|\gamma|\le T} \int_{\sqrt{N-H-p^2}}^{\sqrt{N+H-p^2}} x^{\rho-1}dx + O(\frac{\sqrt{N_1}\ln^2 N}{T})\Big)\,,$$

где $T = \frac{N_1 \ln^3 N}{H}$.

Параметр T выбран с таким расчетом, чтобы остаточный член явной формулы был меньше по порядку, чем $\sqrt{N+H-p^2} - \sqrt{N-H-p^2}$.

Оценим сумму

$$W = \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \int_{\sqrt{N-H-p^2}}^{\sqrt{N+H-p^2}} \Big|\sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1}\Big| dx\,.$$

Справедливо неравенство

$$W \le \sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1} \int_{\sqrt{N-H-n^2}}^{\sqrt{N+H-n^2}} \Big|\sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1}\Big| dx\,.$$

Поскольку из условия теоремы вытекает, что

$$N-(n+1)^2+H \le N-n^2-H\,,$$

имеем

$$W \le \int_{\sqrt{N_1/2}}^{2\sqrt{N_1}} \Big|\sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1}\Big| dx\,.$$

Применим неравенство Коши:

$$W^2 \ll \sqrt{N_1} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \Big| \sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1} \Big|^2 dx\,.$$

Пусть $\delta = \frac{c_1}{\ln^{2/3} N (\ln\ln N)^{1/3}}$, где c_1 — константа из Леммы 3. Разобьем прямоугольник

$$\delta \le \Re s \le 1-\delta, \quad -T \le \Im s \le T\,,$$

по которому суммируются нули дзета–функции, на $O(\ln N)$ ширины $\frac{1}{\ln N}$ и высоты $2T$. Тогда

$$W^2 \ll \sqrt{N_1} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \Big| \sum_{\substack{|\gamma|\le T \\ \sigma\le\beta\le\sigma+1/\ln N}} x^{\rho-1} \Big|^2 dx \ln^2 N,$$

где σ — то число между δ и $1-\delta$, при котором правая часть последнего неравенства максимальна.

Далее, имеем

$$W^2 \leqslant \sqrt{N_1}\ln^2 N \Big(\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T \\ |\gamma-\gamma_1|\leqslant 1}} \sum_{|\gamma_1|\leqslant T} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} x^{2\sigma-2} dx +$$

$$+ \sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T \\ |\gamma-\gamma_1|>1}} \sum_{|\gamma_1|\leqslant T} \frac{1}{|\gamma-\gamma_1|} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} x^{2\sigma-2} dx \Big)\,.$$

В силу лемм 4 и 5 имеем:

$$W^2 \ll \ln^4 N \max_{\sigma\in[0.5,1-\delta]} N_1^{\sigma} N(\sigma,T)\,.$$

Воспользуемся леммами 2 и 3 и неравенством $T^{12/5} < N_1 \exp(-\ln^{0.8} N)$, следующим из условия теоремы:

$$W \ll \sqrt{N_1}\Big(\exp\Big(-\frac{1}{4}\ln^{0.8} N\Big) + \exp\Big(-\frac{\delta}{2}\ln^{0.8} N\Big)\Big) \ln^{2+c/2} N \ll$$

$$\ll \sqrt{N_1}\exp(-2\ln^{0.1} N)\,. \tag{3}$$

Для S справедлива оценка

$$S \gg \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \left(\sqrt{N+H-p^2} - \sqrt{N-H-p^2}\right) - W\,.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$\sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \left(\sqrt{N+H-p^2} - \sqrt{N-H-p^2}\right) \gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln N}\,.$$

Поскольку по условию $H > \sqrt{N}\exp(-\ln^{0.1} N)$, теперь наше утверждение следует из неравенства (3). ■

Литература

1. Huxley M.N. On the difference between consequtive primes // Invent. Math. – 1972. – 15. – P.164-170.
2. Гриценко С.А. Уточнение одной константы в плотностной теореме // Матем. заметки. – 1994. – 55;2. – С.59-61.
3. Линник Ю.В. О возможности единого метода в некоторых вопросах «аддитивной» и «дистрибутивной» теории простых чисел // ДАН СССР. – 1945. – 49;1. – С.3-7.
4. Линник Ю.В. Об одной теореме теории простых чисел // ДАН СССР. – 1945. – 47;1. – С.7-8.
5. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция/ М.: Физматлит, 1994.
6. Гирько В.В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Чебышевский сборник. – 7;4. – С.26-30.
7. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983.

ON DIOFANTINE INEQUALITIES WITH PRIMES

Nguyen Thi Tra

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: nguyentra.bsu@gmail.com

Abstract. It is proved that the inequality $|p_1^2 + p_2^2 - N \leq H|$ is solvable in primes p_1 and p_2 provided $H \geq \sqrt{N}\exp(-\ln^{0.1} N)$.

Keywords: primes, diofantine inequalities, explicit formula, density theorem.